Atrisinājums uzdevumam par Tarzānu (novembra uzdevums)

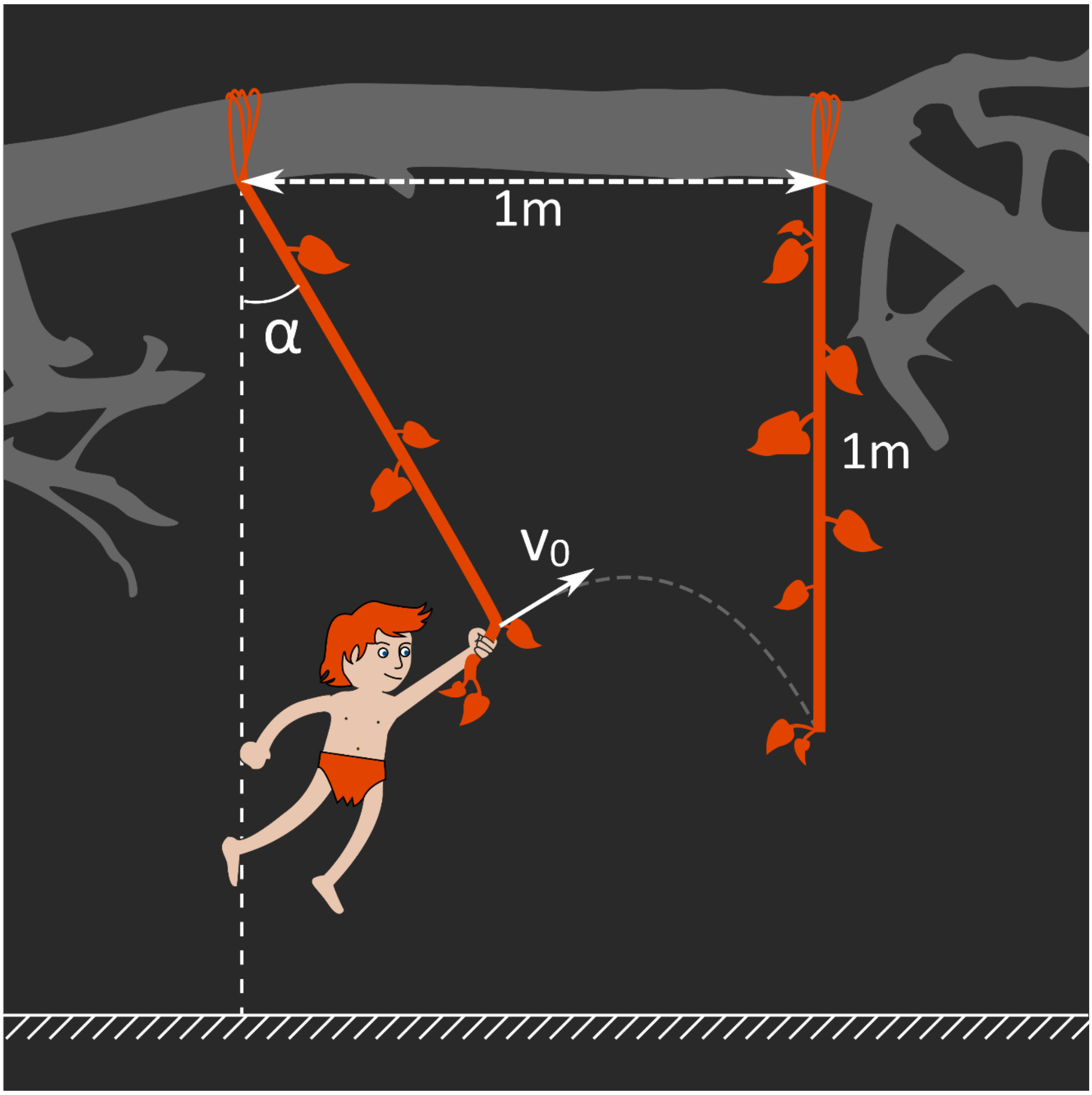
Uzdevuma formulējums:

Tarzāns lec no vienas liānas uz otru. Viņš pieķeras pie pirmās liānas gala un uzšūpojas noteiktā augstumā, tad palaiž liānu vaļā un lido, līdz pieķeras otras liānas galam. Uzdevumā pieņemsim, ka Tarzāns pieķeras pie pirmās liānas tā, ka viņa ātrums visu laiku ir perpendikulārs liānai un vienāds ar v_0 visu kustības laiku. Liānas garums ir 1 m, attālums starp abām liānām ir 1 m. Gaisa berzi uzdevuma ietvaros neņemsim vērā.

a) Vai Tarzāns var no vienas liānas pārlekt uz otru ar jebkādu v_0 vērtību?

b) Vai katrai v_0 vērtībai, ar ko var pārlekt no vienas liānas uz otru, eksistē viens vai vairāki leņķi, pie kuriem var laist vaļā pirmo liānu, lai trāpītu uz otrās liānas gala?

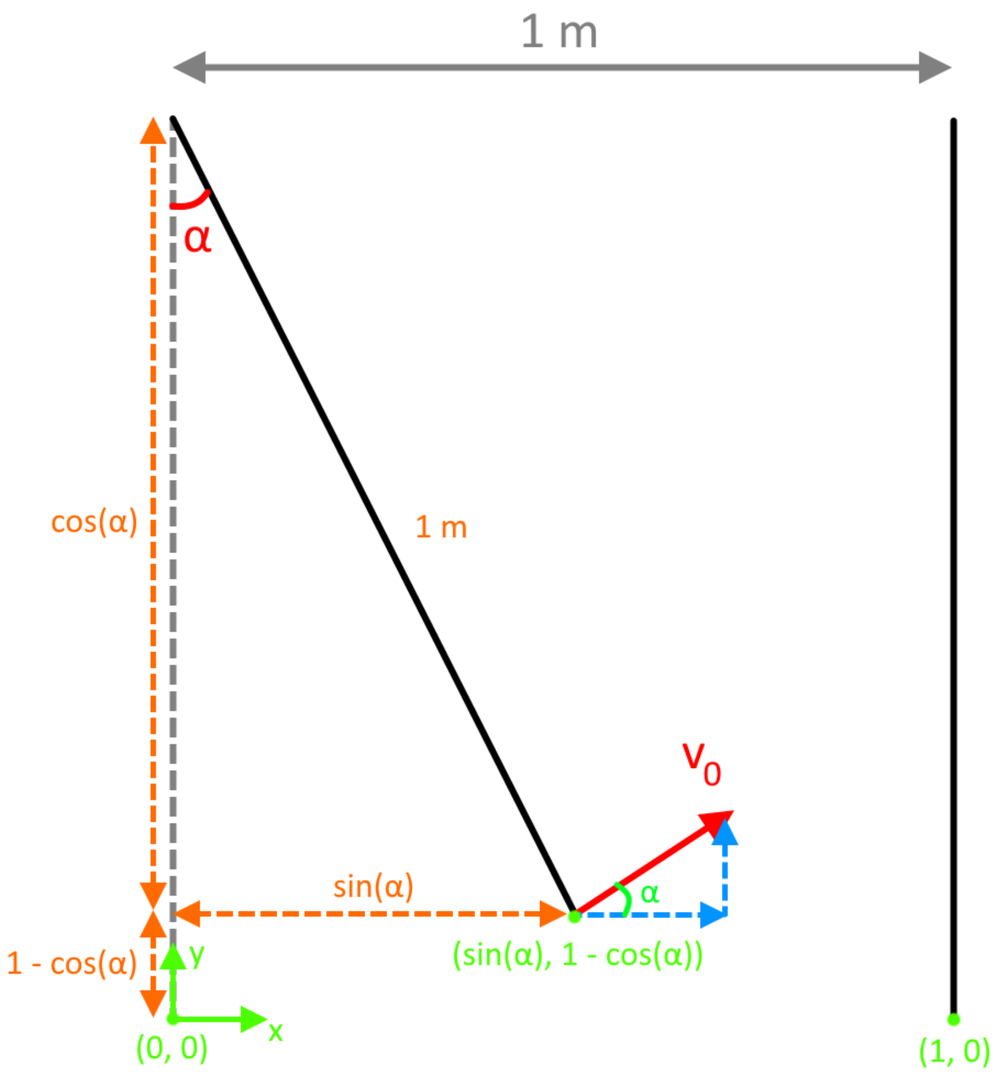
c)* Kā mainās atbildes, ja vairs nevar pieņemt, ka Tarzāna ātrums uz pirmās liānas visu laiku ir v_0, bet gan tikai sākotnējā brīdī, kad viņš tai pieķeras?



Atrisinājums:

Vispirms uzreiz atzīmēsim, ka viena stratēģija Tarzānam ir uzšūpoties līdz leņķim 90°, tad palaist liānu vaļā un lidot pilnīgi vertikāli augšup, tad krist un saķert otro liānu vajadzīgajā brīdī. Jautājums – vai var arī citādi?

Shematiski varam pārzīmēt attēlu:



Izvēlēsimies koordinātu sākumpunktu pirmās liānas apakšā, pirms sākusies jebkāda kustība, vēršot x asi pa labi un y asi uz augšu. Mēģināsim aprakstīt Tarzāna kustību, kad viņš atlaiž vaļā pirmo liānu noteiktā leņķī α. Vispārīgi vienmērīgi paātrinātu kustību divās dimensijās raksturo šādi kustības vienādojumi:

$$x(t) = x_0 + v_{0_x}t + \frac{a_x t^2}{2}$$

$$y(t) = y_0 + v_{0_y}t + \frac{a_y t^2}{2}$$

Nepieciešams tos precizēt konkrēti Tarzāna kustībai. Tā kā izvēlējāmies pirmās liānas apakšu par koordinātu sākumpunktu, mums nepieciešams noteikt sākuma koordinātes x_0 un y_0 vietai, no kuras Tarzāns atlaida liānu. To iespējams izdarīt, izmantojot to, ka liānas garums ir 1 m, un pielietojot trigonometriju taisnleņķa trijstūrī, ko veido pirmā liāna ar vertikāli. Rezultātā iegūstam, ka $x_0 = \sin\alpha$, bet $y_0 = 1 - \cos\alpha$.

Sākuma ātrumu v_0 nepieciešams sadalīt komponentēs:

$$v_{0_x} = v_0 \cos\alpha$$

$$v_{0_y} = v_0 \sin\alpha$$

Savukārt paātrinājuma x virzienā nav, bet y virzienā darbojas gravitācija:

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

Rezultātā konkrēti šajā gadījumā kustības vienādojumi ir šādi:

$$x(t) = \sin\alpha + v_0 \cos\alpha \cdot t$$

$$y(t) = 1 - \cos\alpha + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Tālāk mūs interesē situācija, kad Tarzāns trāpa uz otrās liānas gala. Šī punkta koordinātas mūsu izvēlētajā koordinātu sistēmā ir (1, 0). Tāpēc jāpieprasa, ka Tarzāna kustībā šāds punkts tiek sasniegts, turklāt vienlaicīgi:

$$1 = \sin\alpha + v_0 \cos\alpha \cdot t$$

$$0 = 1 - \cos\alpha + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Tā kā mūs interesē noskaidrot, pie kāda leņķā jālaiž vaļā liāna pie dažādām sākuma ātruma v_0 vērtībām, nepieciešams no vienādojumiem izslēgt laiku t. Tāpēc izteiksim to no pirmā vienādojumu un ievietosim otrajā:

$$t = \frac{(1 - \sin\alpha)}{v_0 \cos\alpha}$$

$$0 = 1 - \cos\alpha + v_0 \sin\alpha \cdot \frac{(1 - \sin\alpha)}{v_0 \cos\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{(1 - \sin\alpha)}{v_0 \cos\alpha}\right)^2$$

Vienkāršosim otro vienādojumu:

$$0 = 1 - \cos\alpha + \cancel{v_0} \sin\alpha \cdot \frac{(1 - \sin\alpha)}{\cancel{v_0} \cos\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{(1 - \sin\alpha)}{v_0 \cos\alpha}\right)^2$$

$$0 = 1 - \cos\alpha + \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}(1 - \sin\alpha)^2$$

Izdarīsim kāpināšanu:

$$0 = 1 - \cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}(1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha)$$

Ērtības labad sareizināsim abas puses ar $\cos^2\alpha$:

$$0 = \cos^2\alpha - \cos^3\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha - \frac{g}{2v_0^2}(1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha)$$

Tagad varam sākt domāt par to, ko nepieciešams panākt – nepieciešams noskaidrot, pie kāda leņķa (vai leņķiem) pie katra v_0 jāatlaiž liāna. Tas nozīmē, ka jānoskaidro visi leņķi α, kas ir saknes šim vienādojumam. Redzam, ka v_0 atrodams tikai pie pēdējā saskaitāmā. Tāpēc uzskatāmības labad labajā pusē atstāsim visu, kas attiecas uz leņķi α, kreisajā pusē pārnesīsim saskaitāmo, kas satur v_0.

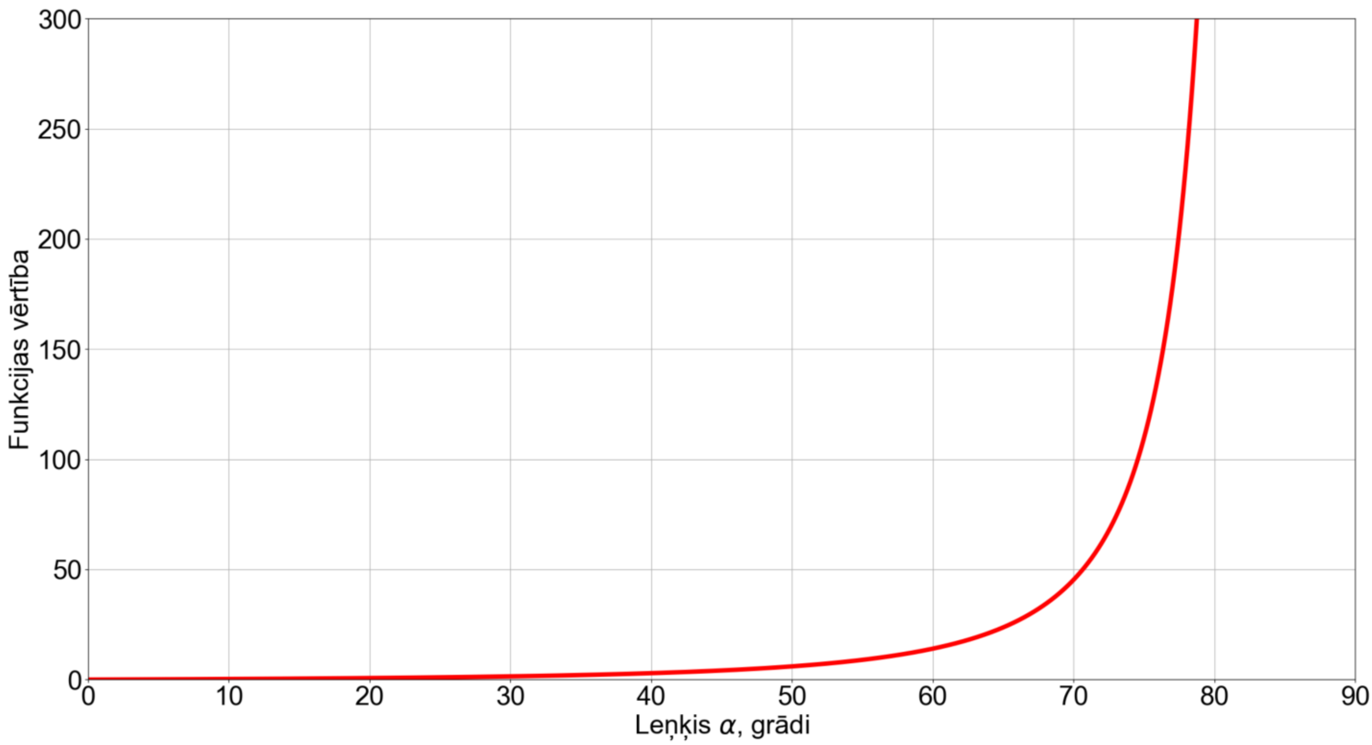
$$\frac{g}{2v_0^2}(1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha) = \cos^2\alpha - \cos^3\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha$$

Vienkāršojam, lai kreisajā pusē paliek tikai v_0, bet labajā tikai α:

$$\frac{g}{2v_0^2} = \frac{\cos^2\alpha - \cos^3\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha}{1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha}$$

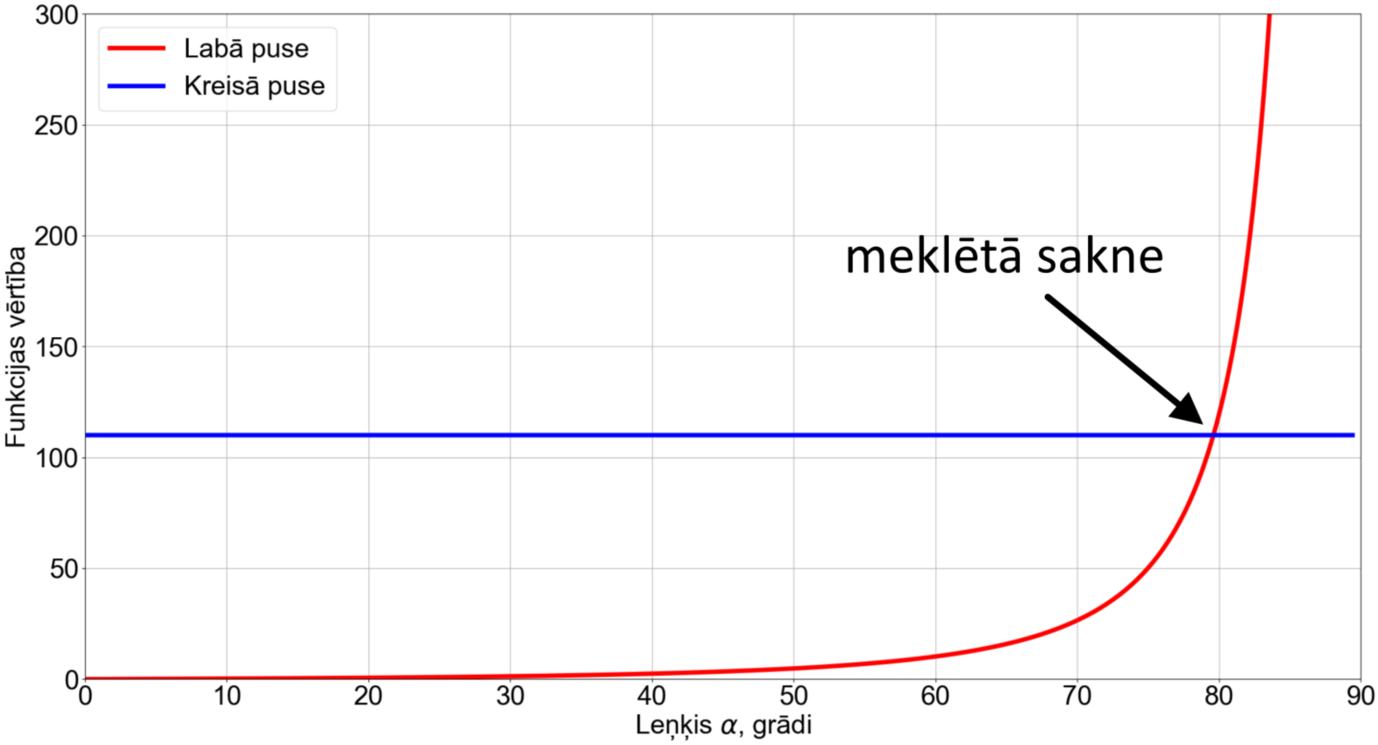
Formāli – lai noskaidrotu, pie kādiem leņķiem drīkst atlaist pirmo liānu, lai trāpītu uz otrās, ir jāatrisina šis vienādojums pret nezināmo α. Taču pietiek paskatīties uz to, lai saprastu, ka tas ir (labākajā gadījumā) ļoti grūti. Taču varam risināt šo uzdevumu gudrāk, jo tas prasa tikai to, *cik* ir tādu leņķu, pie kuriem liānu var atlaist.

Aplūkosim izteiksmes kreisās un labās puses grafiku atkarībā no leņķa α. Kreisā puse ir pavisam neatkarīga no leņķa, tā ir konstanta vērtība pie noteikta izvēlēta v_0. Labā puse ir atkarīga *tikai* no leņķa α. Uzzīmēsim izteiksmes labās puses grafiku atkarībā no leņķa α:



Mēs redzam to, ka izteiksmes labā puse ir vienmērīgi pieaugoša funkcija, kas strauji tiecas uz bezgalību, kad $\alpha \to 90°$. Bet meklētā vienādojuma saknes būtu šī grafika un vienādojuma kreisās puses grafika krustpunkti. **Tā kā vienādojumu kreisā puse ir neatkarīga no leņķa α, tad šajā grafikā tā attēlotos kā horizontāla līnija, kuras augstumu nosaka v_0 vērtība.**

No attēla skaidri redzams, ka katrai v_0 vērtībai atbildīs tieši viens iespējamais krustpunkts. **Tas nozīmē, ka katrai v_0 vērtībai atbilst viens pareizais leņķis, pie kura liāna jālaiž vaļā, lai trāpītu uz otrās liānas gala.**



Tas noved pie secinājuma, ka Tarzāns var pārlekt no vienas liānas uz otru ar <u>jebkādu</u> v_0 vērtību, un <u>katrai</u> v_0 vērtībai atbilst <u>divi</u> leņķi, pie kuriem var atlaist liānu: $\alpha = 90°$ un otrs, kurš ir nosakāms no grafiku krustpunkta. Šis atbild uz uzdevuma a) un b) punktiem.

Uzdevuma c) punktā mainās tas, ka Tarzāna sākuma ātrums vairs nav nemainīgs neatkarīgi no vietas, kur liānu atlaiž. Skaidrs, ka Tarzāna ātrums samazinās, jo augstāk viņš nokļūst. Šo jauno ātrumu v^* var noteikt, piemēram, izmantojot enerģijas saglabāšanās likumu:

$$\frac{\cancel{m}v_0^2}{2} = \cancel{m}gh + \frac{\cancel{m}v^{*2}}{2} = g(1-\cos\alpha) + \frac{v^{*2}}{2}$$

No šejienes var izteikt, kāds ir Tarzāna ātrums uz pirmās liānas leņķī α:

$$v^{*2} = v_0^2 - 2g(1-\cos\alpha)$$

$$v^* = \sqrt{v_0^2 - 2g(1-\cos\alpha)}$$

Uzreiz atzīmēsim – ja Tarzānam pietiek ātruma, lai uzšūpotos līdz 90° leņķim, viņš var izmantot vertikālā lidojuma stratēģiju. Lai tas notiku, mums nepieciešams, lai $v^* \geq 0$, kad $\alpha = 90°$. Ja $\alpha = 90°$, tad zemsaknes izteiksme iepriekšējā vienādojumā kļūst par $\sqrt{v_0^2 - 2g}$, kas būs lielāka vai vienāda ar nulli tikai tad, ja $v_0^2 \geq 2g$ pēc skaitliskās vērtības. Tātad – lai izmantotu vertikālā lidojuma stratēģiju, nepieciešams, lai $v_0 \geq 4.43\ m/s$.

Tagad atliek aprēķināt, kā Tarzānam rīkoties, atlaižoties no citiem leņķiem. Viss, kas mainās iepriekšējā analīzē, ir tas, ka mūsu iegūtajā vienādojumā v_0 jāaizstāj ar v^*.

Iepriekš:

$$\frac{g}{2v_0^2} = \frac{\cos^2\alpha - \cos^3\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha}{1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha}$$

Tagad:

$$\frac{g}{2\left(v_0^2 - 2g(1-\cos\alpha)\right)} = \frac{\cos^2\alpha - \cos^3\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha}{1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha}$$

(Piezīmēsim, ka šeit v_0 mainījis nozīmi – tas apzīmē ātrumu, ar kādu Tarzāns saķēra pirmo liānu pašā kustības sākumā.)

Vienkāršojam:

$$\frac{g}{2v_0^2 - 4g(1-\cos\alpha)} = \frac{\cos^2\alpha - \cos^3\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha}{1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha}$$

Pašlaik ir problēma, ka vienādojuma kreisā puse kļuvusi atkarīga no leņķa α. Lai pielietotu iepriekšējo metodi, nepieciešams to labot. Lai to panāktu, apgriezīsim abus vienādojumus otrādi:

$$\frac{2v_0^2 - 4g(1-\cos\alpha)}{g} = \frac{1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cos^3\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha}$$

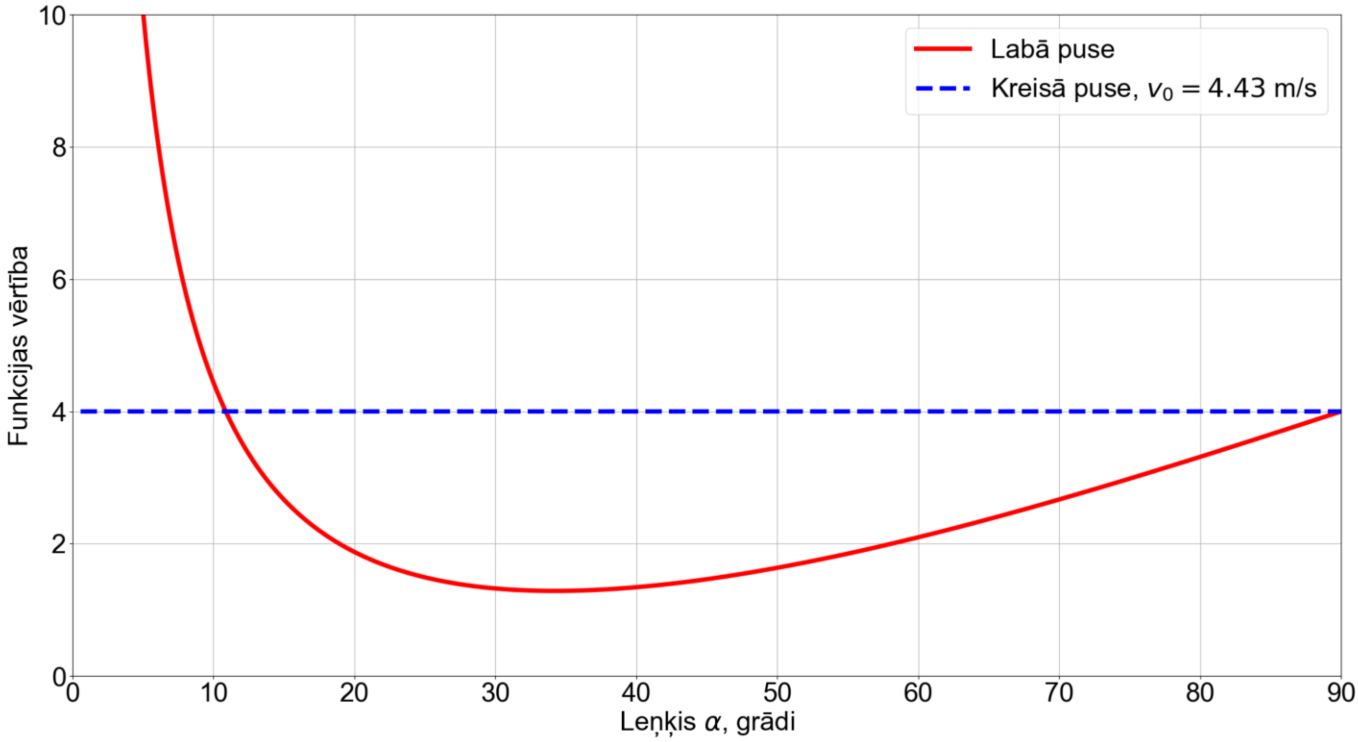
Vienkāršojam kreiso pusi:

$$\frac{2v_0^2}{g} - 4(1-\cos\alpha) = \frac{1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cos^3\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha}$$

Tagad varam atkal atdalīt saskaitāmos tā, lai tikai labajā pusē paliek atkarība no α:

$$\frac{2v_0^2}{g} = 4(1-\cos\alpha) + \frac{1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cos^3\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha}$$

Uzzīmēsim grafikus jauniegūtajam vienādojumam:



Funkcija ir mainījusi savu grafisko formu, jo mēs pa ceļam apgriezām izteiksmes kreiso un labo pusi.

Atbilde uz c) jautājumu sanāk ļoti interesanta:

- Eksistē apgabals, kurā **nav** krustpunktu starp horizontālu līniju un izteiksmes labās puses grafiku. Attiecīgi šajā gadījumā ar pārāk maziem sākuma ātrumiem vispār nav iespējams nonākt uz otrās liānas (kas ir intuitīvi pareizi).
- Ātrumam v_0 palielinoties un horizontālajai līnijai ejot uz augšu, vienā brīdī vispirms parādīsies **viens** krustpunkts (un tātad viens pareizais leņķis, pie kura atlaist liānu), tālāk **divi.**
- Interesantā kārtā – vēl vairāk palielinoties v_0 vērtībai, atkal būtu tikai viens krustpunkts, taču šī izmaiņa notiek tieši pie $v_0 = 4.43\ m/s$, kad atkal darbojas Tarzāna vertikālā lidojuma stratēģija. Tas nozīmē, ka arī tālākajā posmā eksistē **divi** leņķi, pie kuriem var atlaist liānu – krustpunkts ar grafiku un $\alpha = 90°$.