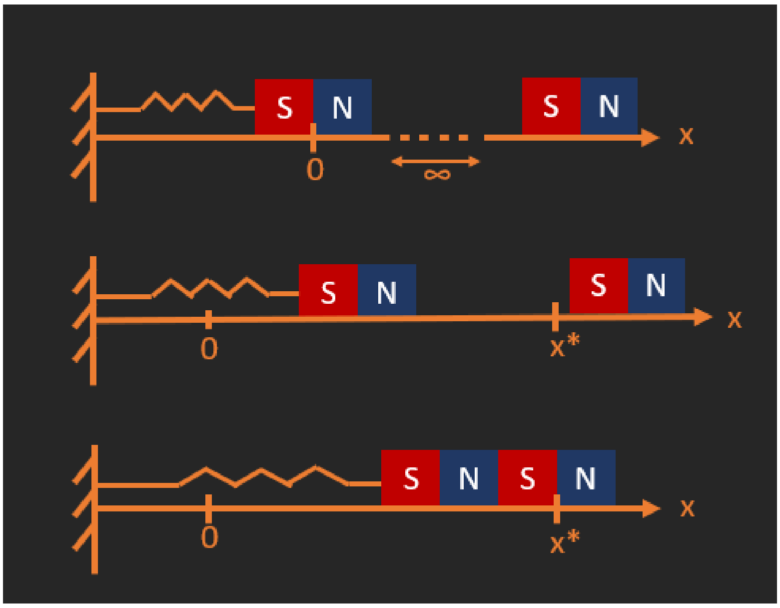
JAUNO FIZIĶU SKOLA

Uzdevuma formulējums:

Tev ir divi vienādi magnēti. Vienu magnētu tu piestiprini pie sienas ar atsperi, kurai ir stinguma koeficients k. Otru magnētu tu lēnām, visu laiku turot rokā, lai tas neizslīd, tuvini klāt pirmajam magnētam. Magnēti ir pagriezti tā, lai viena ziemeļpols ir vērsts otra dienvidpolā. Sākumā pirmais magnēts izstiepj atsperi un lēnām nobīdās tuvāk otrajam magnētam, bet atspere spēj to noturēt. Bet kad otrais magnēts tiek pielikts nedaudz tuvāk par kādu kritisko attālumu x^* no pirmā magnēta **sākuma pozīcijas**, atspere vairs to nespēj noturēt un pirmais magnēts strauji izslīd un pielīp klāt otrajam magnētam.



Pateiksim priekšā noslēpumu, ko skolā nestāsta – divi magnēti, kas ir gana tālu viens no otra pievelkas (ja novietoti pareizā orientācijā) ar spēku

$$F_m = \frac{a}{r^4},$$

kur r ir attālums starp magnētiem un a ir konstante, kas atkarīga no magnētu stipruma.

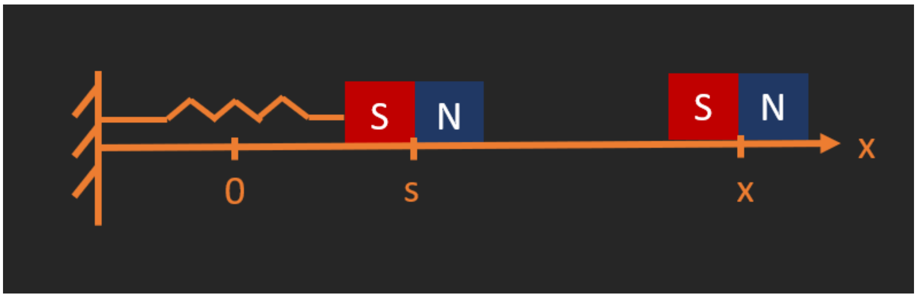
a) Kāds ir attālums x^*, pie kura pirmais magnēts izslīd un pielīp pie otrā, ja zini konstantes a un k?
   - Ja grūti atrisināt vispārīgi, vari izmantot šādas konstantes: $a = 6 \cdot 10^{-7} Nm^4$ un $k = 2\ N/m$.

b) Kad tas ir izdarīts, pamēģini eksperimentāli noteikt divu vienādu magnētu stiprumu (jeb t.s. magnētisko momentu). Iekar vienu magnētu gana deformējamā atsperē, un lēnām no apakšas tuvini otru. Kad magnēti strauji salīp, piefiksē x^*. No a) uzdevumā iegūtās formulas aprēķini a konstanti. Bet šo konstanti var izteikt detalizētāk

$$a = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi},$$

kur $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$ ir magnētiskā konstante un m ir katra magnēta magnētiskais moments, kas arī ir jāatrod un ko var pēc tam salīdzināt ar ražotāja uzdotajiem parametriem (tipiskas vērtības neodīma magnētiņiem ir ap 1 Am^2).

Atrisinājums:



Apzīmēsim ar s pirmā magnēta koordinātu un ar x – otrā magnēta koordinātu.

Kad mēs tuvinām otro magnētu klāt, pirmais magnēts neaizslīd magnētiskā spēka iedarbībā uzreiz pie otrā, jo to atpakaļ spēj noturēt tikpat liels spēks, ko rada atspere. Pielīdzinot šos spēkus, var uzrakstīt

$$ks = \frac{a}{(x-s)^4}.$$

Šī ir tā sakarība, kas pasaka, cik ļoti deformēsies atspere ar to, cik tuvu pieliekam otro magnētu. Lai spētu vieglāk to uzzīmēt, izteiksim x. Aiznesot $(x-s)^4$ vienā pusē,

$$(x-s)^4 = \frac{a}{ks}.$$

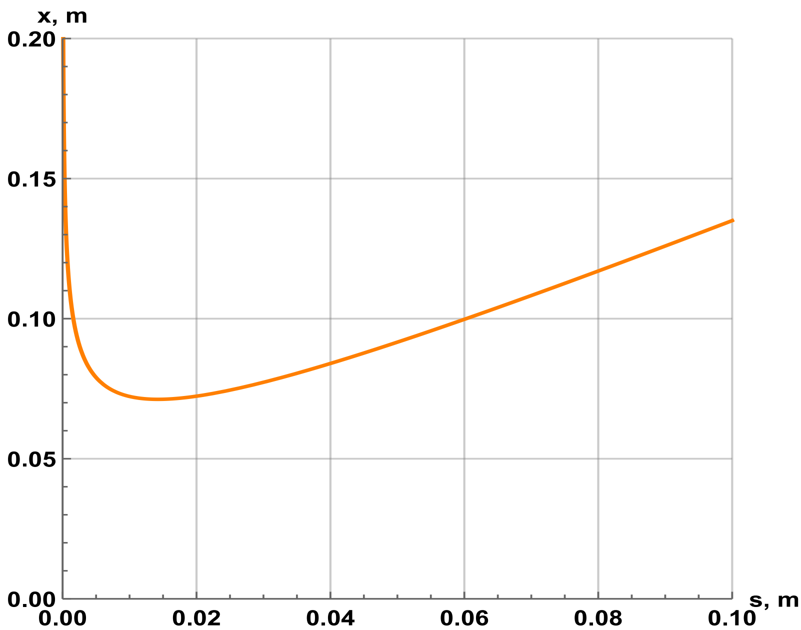
Tagad izvelkam 4. kārtas sakni

$$x - s = \left(\frac{a}{ks}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

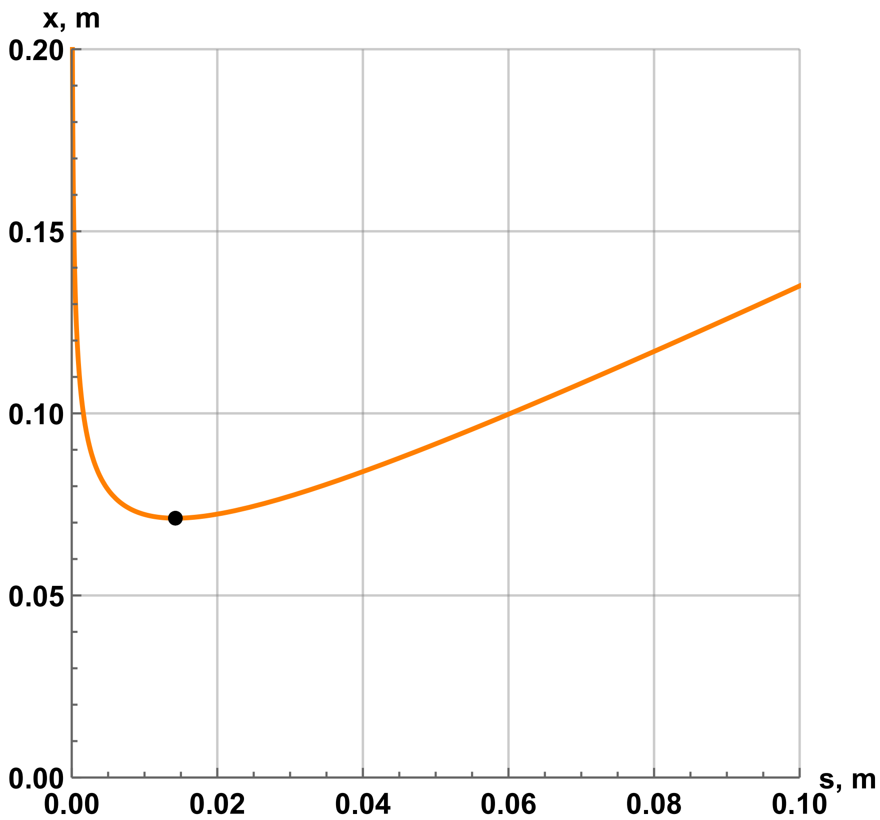
Visbeidzot izsakām x

$$x = s + \left(\frac{a}{ks}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Šo vienādojumu mēs tagad varam uzzīmēt. Ar $a = 3 \cdot 10^{-7} Nm^4$ un $k = 2\ N/m$ grafiks izskatās šādi, bet tā forma paliek līdzīga arī vispārīgajā gadījumā – pie citām a un k vērtībām.



Sākumā, kad otrais magnēts ir tālu ($x \to \infty$), atrodamies šī grafika kreisajā augšējā stūrī un $s = 0$. Samazinot x, mēs ejam šajā grafikā lejup pa kreiso zaru un s sāk palielināties. Taču redzams, ka ir kāds kritiskais x, zem kura paejot, vairs nav iespējams atrast tādu s, lai atspere spēku pretoties magnētiskajam spēkam. Šajā mirklī arī magnēti salīp kopā.



Tātad jāatrod šī punkta koordinātas (s^*, x^*), kur x^* arī būs meklējamais attālums, cik tuvu mēs varam pielikt otro magnētu pirms pirmais pielīp klāt. s^* būs maksimālā nobīde pirmajam magnētam, ar ko tas vēl var noturēties pret magnētisko spēku.

Šo punktu mēs varam nolasīt grafiski, un iegūstam $s^* = 0{,}016\ m$, $x^* = 0{,}082\ m$.

Ja mēs mācētu atrast līknes $x = s + \left(\frac{a}{ks}\right)^{\frac{1}{4}}$ minumuma punktu, mēs varētu arī uzrakstīt formulu s^* un x^*. Izmantojot matemātisko analīzi, funkcijas minimumu var atrast, to atvasinot un pielīdzinot nullei.

$$x' = \frac{dx}{ds} = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{ks}\right)^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{a}{ks}\right)' = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{ks}\right)^{-\frac{3}{4}}\frac{a}{ks^2}$$

Bet atceramies, ka

$$a^{-\frac{3}{4}}a = a^{-\frac{3}{4}}a^{\frac{4}{4}} = a^{\frac{1}{4}}$$

$$k^{-\frac{3}{4}}k = k^{-\frac{3}{4}}k^{\frac{4}{4}} = k^{\frac{1}{4}}$$

$$s^{-\frac{3}{4}}s^2 = s^{-\frac{3}{4}}s^{\frac{8}{4}} = s^{\frac{5}{4}}$$

Tos ievietojot iegūst

$$x' = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{ks^5}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Šo tad pielīdzinām nullei, lai atrastu ekstrēmu

$$1-\frac{1}{4}\left(\frac{a}{ks^5}\right)^{\frac{1}{4}}=0$$

$$1=\frac{1}{4}\left(\frac{a}{ks^5}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$4=\left(\frac{a}{ks^5}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Izkāpinām abas puses 4. pakāpē

$$256=\frac{a}{ks^5}$$

$$s^5=\frac{a}{256k}$$

Izvelkam piektās pakāpes sakni

$$\boldsymbol{s^*=\left(\frac{a}{256k}\right)^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{\frac{a}{256k}}}$$

Šeit apzīmējām s ar s^*, jo tas atbilst minimālajam punktam grafikā. Ievietojam to vienādojumā $x=s+\left(\frac{a}{ks}\right)^{\frac{1}{4}}$, lai atrastu minimālo x^*

$$x^*=s^*+\left(\frac{a}{ks^*}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Ar šo pietiek, lai atrastu x^*, bet uzdevums cilvēkiem ar veiklām rokām – parādi, ka šī izteiksme vienkāršojas un ir spēkā arī

$$x^*=5s^*.$$